

バンドル交会アルゴリズム説明書

1. 与件

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ y_{1i} \\ z_{1i} \end{bmatrix} t_i + \begin{bmatrix} x_{0i} \\ y_{0i} \\ z_{0i} \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad X = X_{1i} t_i + X_{0i} \quad \text{バンドル方程式} \quad (i = 1 \cdots n)$$

n バンドル数

2. 解

求点を $\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix}$ とすると、

$$S = \sum_{i=1}^n \left\{ (x_{1i} t_i + x_{0i} - x_g)^2 + (y_{1i} t_i + y_{0i} - y_g)^2 + (z_{1i} t_i + z_{0i} - z_g)^2 \right\}$$

を最小にすればよい。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t_i} = X_{1i}^2 t_i - x_{1i} x_g - y_{1i} y_g - z_{1i} z_g + X_{1i} X_{0i} = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_g} = -\sum_{i=1}^n x_{1i} t_i + n x_g - \sum_{i=1}^n x_{0i} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial y_g} = -\sum_{i=1}^n y_{1i} t_i + n y_g - \sum_{i=1}^n y_{0i} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial z_g} = -\sum_{i=1}^n z_{1i} t_i + n z_g - \sum_{i=1}^n z_{0i} = 0$$

$$X_{1i}^2 = x_{1i}^2 + y_{1i}^2 + z_{1i}^2$$

where

$$X_{1i} X_{0i} = x_{1i} x_{0i} + y_{1i} y_{0i} + z_{1i} z_{0i}$$

これが正規方程式である。行列表現では、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} X_{11}^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X_{1n}^2 & & & \\ & & & n & & \\ & & & & n & \\ & & & & & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{11} X_{01} \\ \vdots \\ X_{1n} X_{0n} \\ -\sum_{i=1}^n x_{0i} \\ -\sum_{i=1}^n y_{0i} \\ -\sum_{i=1}^n z_{0i} \end{bmatrix} = 0$$

(sym)