

標定アルゴリズム説明書

1. 標記の共通事項

1. 行列、ベクトルは大文字、スカラーは小文字で表す（例外：放射計の番号を示す I ）。
2. ベクトル、行列の成分の表示には、カギ括弧 $[]$ を用いる。関数の引数は、丸括弧 $()$ を用いる。式の評価順序は、中括弧 $\{ \}$ を用いる。
3. 行列 M の転置は、 M^T で表す。
4. 地上点の番号は、 i で表す。地上点の数は n で表す。
5. F(前方視)、N(直下視)、B(後方視)で放射計を指定する。 I は、これらのうちのいずれかを指す。
6. CCD 座標は、放射計の光軸を基準とした 3 次元座標 (+Z: 光軸地球方向、+Y: ライン方向、+X: 直下視では衛星進行方向)。
7. ピクセル、ライン、CCD 座標、衛星座標、地上座標 (ECR) の順に座標変換する。
8. 値 x の観測値は、 $x^{(b)}$ とする。
9. 残差は V, v で表す。何に対する残差かは、適宜判断する。

2. 与件

- $X_{Gi}^{(b)}$ 地上点 i の地上座標 (ECR) の観測値 (基準点成果)
- p_{li}, l_{li} 地上点 i の放射計 I の像点のピクセル番号、ライン番号の観測値 (実数値)
- c_I 放射計 I の画面距離の地上計測値
- $\begin{bmatrix} u_I(p_I) \\ v_I(p_I) \\ c_I \end{bmatrix}$ 放射計 I のピクセル番号 p_I から CCD 座標への変換式 ($u_I()$ 、 $v_I()$ が既知の関数)
- $t_I(l)$ 放射計 I のライン番号 l を観測した時刻 ($t_I()$ が既知の関数)
- R_I 放射計 I の指向の地上計測値 (CCD 座標系のベクトルを衛星座標系のベクトルに変換する回転行列)
- $R_{SI}^{(b)}(t)$ 時刻 t の衛星の姿勢 (衛星座標系のベクトルを ECR のベクトルに変換する回転行列) の観測値 ($R_{SI}^{(b)}()$ が既知の関数)
- $O(t)$ 時刻 t の ECR における衛星座標系の原点 (衛星の質量中心) の位置の観測値 ($O^{(b)}()$ が既知の関数)
- O_I 衛星座標系における放射計 I の投影中心の位置の地上計測値

$$R \begin{pmatrix} \omega \\ \varphi \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回転角から回転行列への変換式

3. 仮定

- ・ 簡単のため、ピクセル番号、ライン番号ではなく、CCD 座標に誤差があると仮定する。

- ・地上点の地上座標の観測値 $X_{Gi}^{(b)}$ 、CCD 座標の XY 成分の観測値 $u_I(p_{ii})$ 、 $v_I(p_{ii})$ の誤差を仮定する。
- ・ CCD 座標、放射計 I の指向 R_I 、衛星の姿勢 $R_{SI}^{(b)}(t)$ 、衛星の位置 $O^{(b)}(t)$ には、系統的な誤差があると仮定する。
- ・上記以外の誤差は仮定しない。
- ・衛星の姿勢の誤差、放射計の指向の誤差と、衛星の位置の誤差のクロスタームは、無視する。

4 . 写真測量の基本式

補正項がない場合の写真測量の基本式は、以下のとおりである

$$X_{Gi} = kR_{SI}^{(b)}(t_I(l_{ii}))R_I X_{li} + O^{(b)}(t_I(l_{ii})) + R_{SI}^{(b)}(t_I(l_{ii}))O_I \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

(地上座標 = k 衛星の姿勢・放射計の指向・CCD 座標 + 衛星の質量中心 + 投影中心のオフセット)

ここで、上記の仮定に基づく補正項を入れると、写真測量の基本式は、以下のとおりである。

$$X_{Gi} = kR(A_S(H_S, t_I(l_{ii})))R_{SI}(t_I(l_{ii}))R(A_{RI})R_I \{X_{li} + A_X(H_{XI}, p_{ii})\} + O^{(b)}(t_I(l_{ii})) + A_O(H_O, t) + R_{SI}^{(b)}(t_I(l_{ii}))O_I \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

$$\text{ここで、 } X_{li} = \begin{bmatrix} x_{li} \\ y_{li} \\ c_I \end{bmatrix}, \quad X_{li}^{(b)} = \begin{bmatrix} x_{li}^{(b)} \\ y_{li}^{(b)} \\ c_I^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_I(p_{ii}) \\ v_I(p_{ii}) \\ c_I \end{bmatrix} \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

(補正項)

$A_S(H_S, t)$ 時刻 t における衛星の姿勢 $R_{SI}^{(b)}(t)$ の補正量 (関数形が既知の補正モデル)

H_S 上記補正モデルパラメータ。

A_{RI} 放射計 I の指向 R_I の補正量。 ($I = F, N, B$)

$A_O(H_O, t)$ 時刻 t の衛星座標系の原点の位置 $O^{(b)}(t)$ の補正值 (関数形が既知の補正モデル)

H_O 上記補正モデルのパラメータ。

$A_X(H_{XI}, p_I)$ 放射計 I のピクセル番号 p_I の位置における CCD 座標の補正量 (関数形が既知の補正モデル)

H_{XI} 上記補正モデルのパラメータ ($I = F, N, B$)

4 . 補正項の形式

$$H_S = [h_{S\omega 0} \quad h_{S\omega 1} \quad h_{S\omega 2} \quad h_{S\omega 3} \quad h_{S\phi 0} \quad h_{S\phi 1} \quad h_{S\phi 2} \quad h_{S\phi 3} \quad h_{S\kappa 0} \quad h_{S\kappa 1} \quad h_{S\kappa 2} \quad h_{S\kappa 3}]^T$$

$$A_S(H_S, t) = \begin{bmatrix} h_{S\omega 0} + h_{S\omega 1}t + h_{S\omega 2}t^2 + h_{S\omega 3}t^3 \\ h_{S\phi 0} + h_{S\phi 1}t + h_{S\phi 2}t^2 + h_{S\phi 3}t^3 \\ h_{S\kappa 0} + h_{S\kappa 1}t + h_{S\kappa 2}t^2 + h_{S\kappa 3}t^3 \end{bmatrix} \quad (\text{時間の 3 次式})$$

$$A_{RI} = [h_{R\omega I} \quad h_{R\phi I} \quad h_{R\kappa I}]^T \quad (\text{定数項})$$

$$H_O = [h_{x0} \quad h_{x1} \quad h_{y0} \quad h_{y1} \quad h_{z0} \quad h_{z1}]^T \quad A_O(H_O, t) = \begin{bmatrix} h_{x0} + h_{x1}t \\ h_{y0} + h_{y1}t \\ h_{z0} + h_{z1}t \end{bmatrix} \quad (\text{時間の 1 次式})$$

$$H_{XI} = [h_{wl} \quad h_{vl} \quad h_{cl}]^T$$

$$A_X(H_{XI}, p_I) = A_X(H_{XI}) = \begin{bmatrix} h_{wl} \\ h_{vl} \\ h_{cl} \end{bmatrix} \quad (\text{定数項；主点位置のずれ + 焦点距離の補正})$$

5 . パラメータ k の消去

写真測量の基本式から、パラメータ k を消去する。

$$k \{X_{li} + A_X(H_{XI}, p_{li})\} = B$$

$$B = \{R_I\}^T \{R(A_{RI})\}^T \{R_{SI}(t_I(l_{li}))\}^T \{R(A_S(H_S, t_I(l_{li})))\}^T \{X_{Gi} - O^{(b)}(t_I(l_{li})) - A_O(H_O, t) - R_{SI}^{(b)}(t_I(l_{li}))O_I\} \\ (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

成分毎には、

$$k \begin{bmatrix} x_{li} + h_{wl} \\ y_{li} + h_{vl} \\ c_I + h_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = B \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

なお、 b_1 、 b_2 、 b_3 は、パラメータ X_{Gi} 、 H_S 、 A_{RI} 、 H_O の関数であり、 I 、 i にも依存する。

$$x_{li} = \{c_I + h_{cl}\} \frac{b_1}{b_3} - h_{wl} \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

$$y_{li} = \{c_I + h_{cl}\} \frac{b_2}{b_3} - h_{vl} \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

6 . 観測方程式

$$X_{Gi} = X_{Gi}^{(b)} + V \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

$$\{c_I + h_{cl}\} \frac{b_1}{b_3} - h_{wl} = u_I(p_{li}) + v \quad (x_{li}^{(b)} = u_I(p_{li})) \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

$$\{c_I + h_{cl}\} \frac{b_2}{b_3} - h_{vl} = v_I(p_{li}) + v \quad (y_{li}^{(b)} = v_I(p_{li})) \quad (I = F, N, B, i = 1 \cdots n)$$

$$A_S(H_S, t) = V \quad (A_S(H_S, t)^{(b)} = 0) \quad (\text{全ての時刻})$$

$$A_{RI} = V \quad (A_{RI}^{(b)} = 0) \quad (I = F, N, B)$$

$$A_O(H_O, t) = V \quad (A_O(H_O, t)^{(b)} = 0) \quad (\text{全ての時刻})$$

$$h_{wl} = v \quad (h_{wl}^{(b)} = 0) \quad (I = F, N, B)$$

$$h_{vl} = v \quad (h_{vl}^{(b)} = 0) \quad (I = F, N, B)$$

$$h_{cl} = v \quad (h_{cl}^{(b)} = 0) \quad (I = E, N, B)$$

なお、パスポイントでは、地上点の観測方程式の重みを 0 とし、基準点と同一の形式を用いる。また、観測方程式の微係数は、数値微分で求める。

7. 位置と姿勢の観測方程式（地上点のみを用いる方法）

伝統的な方法では、全ての時刻に適用されるべき位置と姿勢の観測方程式を、地上観測点が存在する時刻のみに適用する。観測方程式は、成分ごとに

$$\begin{aligned} h_{x0} + h_{x1}t &= 0 && \text{(地上を観測した全ての時刻 } t \text{)} \\ h_{y0} + h_{y1}t &= 0 && \text{(地上を観測した全ての時刻 } t \text{)} \\ h_{z0} + h_{z1}t &= 0 && \text{(地上を観測した全ての時刻 } t \text{)} \\ h_{S\omega0} + h_{S\omega1}t + h_{S\omega2}t^2 + h_{S\omega3}t^3 &= 0 && \text{(地上を観測した全ての時刻 } t \text{)} \\ h_{S\phi0} + h_{S\phi1}t + h_{S\phi2}t^2 + h_{S\phi3}t^3 &= 0 && \text{(地上を観測した全ての時刻 } t \text{)} \\ h_{S\kappa0} + h_{S\kappa1}t + h_{S\kappa2}t^2 + h_{S\kappa3}t^3 &= 0 && \text{(地上を観測した全ての時刻 } t \text{)} \end{aligned}$$

となる。各観測を独立と仮定すると、正規方程式は加法的に作成でき（部分的な観測に対する正規方程式を加算したものが、全観測に対する正規方程式となる）

$$\begin{aligned} \sum_{\text{地上を観測した全ての時刻 } t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{Sx0} \\ h_{Sx0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sum_{\text{地上を観測した全ての時刻 } t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{Sy0} \\ h_{Sy0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sum_{\text{地上を観測した全ての時刻 } t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{Sz0} \\ h_{Sz0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{地上を観測した全ての時刻 } t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \\ t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \\ t^3 & t^4 & t^5 & t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\omega0} \\ h_{S\omega1} \\ h_{S\omega2} \\ h_{S\omega3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sum_{\text{地上を観測した全ての時刻 } t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \\ t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \\ t^3 & t^4 & t^5 & t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\phi0} \\ h_{S\phi1} \\ h_{S\phi2} \\ h_{S\phi3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sum_{\text{地上を観測した全ての時刻 } t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \\ t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \\ t^3 & t^4 & t^5 & t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\kappa0} \\ h_{S\kappa1} \\ h_{S\kappa2} \\ h_{S\kappa3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

8 . 位置と姿勢の観測方程式（時間積分を用いる方法）

全て時刻に関する位置と姿勢の観測方程式は、具体的には

$$v = h_{x0} + h_{x1}t = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{x0} \\ h_{x1} \end{bmatrix} \quad (\text{全ての時刻})$$

$$v = h_{y0} + h_{y1}t = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{y0} \\ h_{y1} \end{bmatrix} \quad (\text{全ての時刻})$$

$$v = h_{z0} + h_{z1}t = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{z0} \\ h_{z1} \end{bmatrix} \quad (\text{全ての時刻})$$

$$v = h_{S\omega0} + h_{S\omega1}t + h_{S\omega2}t^2 + h_{S\omega3}t^3 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\omega0} \\ h_{S\omega1} \\ h_{S\omega2} \\ h_{S\omega3} \end{bmatrix} \quad (\text{全ての時刻})$$

$$v = h_{S\phi0} + h_{S\phi1}t + h_{S\phi2}t^2 + h_{S\phi3}t^3 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\phi0} \\ h_{S\phi1} \\ h_{S\phi2} \\ h_{S\phi3} \end{bmatrix} \quad (\text{全ての時刻})$$

$$v = h_{S\kappa0} + h_{S\kappa1}t + h_{S\kappa2}t^2 + h_{S\kappa3}t^3 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\kappa0} \\ h_{S\kappa1} \\ h_{S\kappa2} \\ h_{S\kappa3} \end{bmatrix} \quad (\text{全ての時刻})$$

各観測を独立と仮定すると、正規方程式は加法的に作成でき（部分的な観測に対する正規方程式を加算したものが、全観測に対する正規方程式となる）、上記観測方程式に対する正規方程式（部分）は、

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{x0} \\ h_{x1} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{全ての時刻})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{y0} \\ h_{y1} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{全ての時刻})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{z0} \\ h_{z1} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{全ての時刻})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \\ t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \\ t^3 & t^4 & t^5 & t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\omega0} \\ h_{S\omega1} \\ h_{S\omega2} \\ h_{S\omega3} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{全ての時刻})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \\ t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \\ t^3 & t^4 & t^5 & t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\phi 0} \\ h_{S\phi 1} \\ h_{S\phi 2} \\ h_{S\phi 3} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{全ての時刻})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \\ t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \\ t^3 & t^4 & t^5 & t^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\kappa 0} \\ h_{S\kappa 1} \\ h_{S\kappa 2} \\ h_{S\kappa 3} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{全ての時刻})$$

全ての時刻、あるいはラインの和をとる代わりに積分すると、

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{x0} \\ h_{x1} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{y0} \\ h_{y1} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{z0} \\ h_{z1} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\omega 0} \\ h_{S\omega 1} \\ h_{S\omega 2} \\ h_{S\omega 3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\phi 0} \\ h_{S\phi 1} \\ h_{S\phi 2} \\ h_{S\phi 3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{S\kappa 0} \\ h_{S\kappa 1} \\ h_{S\kappa 2} \\ h_{S\kappa 3} \end{bmatrix} = 0$$

$$s_j = \int_{t_S}^{t_E} t^{j-1} dt = \frac{t_E^j - t_S^j}{j}$$

t_S 観測開始時刻

t_E 観測終了時刻

これらの観測方程式の重みは、以下のようにする。ただし、「観測が独立と考えられる時間」については、経験によらざるを得ない。

単独の位置の観測の重み / 位置の観測が独立と考えられる時間