座標計算アルゴリズム説明書

１．目的

本書は、以下の座標系の間の座標変換の方法について記載する。

・経度緯度（と楕円体高）
・地心３次元直交座標
・ガウスークリューゲル図法（平面直角座標、UTM 座標）
・LSR 座標系（Local Space Rectangular system）（アンカーポイントを原点とし、そこの東方向＝X 軸正方向、北方向＝Y 軸正方向、Z 軸＝X 軸×Y 軸の右手系＝楕円体高方向とする３次元直交座標系）

２．使用する記号

a、e	地球楕円体の長半径、離心率
φ、λ、H	緯度、経度、楕円体高
x、y、z	地心３次元直交座標
x_L、y_L	ガウスークリューゲル図法の座標値、あるいは
x_L、y_L、z_L	LSR 座標の座標値
φ_0、λ_0	ガウスークリューゲル図法の原点の緯度、経度、あるいは
φ_0、λ_0、H_0	LSR 座標系の原点（アンカーポイント）の緯度、経度、楕円体高
x_0、y_0	ガウスークリューゲル図法の原点の座標値
m_0	原点での縮尺係数
m	縮尺係数

３．３次元直交座標と緯度経度の変換

（参考文献）萩原幸雄「測地学入門」pp.43-48

3.1 緯度経度→３次元直交座標の計算手順

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$ （卯酉線曲率半径）

$$x = (N+H)\cos\varphi\cos\lambda$$

$$y = (N+H)\cos\varphi\sin\lambda$$

$$z = \left((1-e^2)N+H\right)\sin\varphi$$

3.2 ３次元直交座標→緯度経度の計算手順

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

φ、H は、以下のイテレーションで求める。

$$x' = \sqrt{x^2+y^2}$$

$\varphi^{(0)}$、$H^{(0)}$ 緯度、楕円体高の近似値

$\varphi^{(1)}$、$H^{(1)}$ 緯度、楕円体高の改良値

$$N^{(0)}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^{(0)}}}$$ （卯酉線曲率半径の近似値）

$$M^{(0)}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi^{(0)}\right)^{3/2}}$$ （子午線曲率半径の近似値）

$$\Delta x'=x'-\left(N^{(0)}+H^{(0)}\right)\cos\varphi^{(0)}$$
$$\Delta z=z-\left(\left(1-e^2\right)N^{(0)}+H^{(0)}\right)\sin\varphi^{(0)}$$

$$\varphi^{(1)}=\varphi^{(0)}+\frac{1}{M^{(0)}+H^{(0)}}\left(-\Delta x'\sin\varphi^{(0)}+\Delta z\cos\varphi^{(0)}\right)$$
$$H^{(1)}=H^{(0)}+\Delta x'\cos\varphi^{(0)}+\Delta z\sin\varphi^{(0)}$$

なお、初期値は、

$$\varphi^{(0)}=\tan^{-1}\left(\frac{z}{\left(1-e^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$H^{(0)}=0$$

3.3 **参考**

$$\frac{\partial N}{\partial\varphi}=\frac{ae^2}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$M=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$ （子午線曲率半径）

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial x}{\partial H}\\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial H}\\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial H}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\left(M+H\right)\sin\varphi\cos\lambda & -\left(N+H\right)\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda\\ -\left(M+H\right)\sin\varphi\sin\lambda & \left(N+H\right)\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda\\ \left(M+H\right)\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x'}{\partial\varphi} & \frac{\partial x'}{\partial H}\\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial H}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\left(M+H\right)\sin\varphi & \cos\varphi\\ \left(M+H\right)\cos\varphi & \sin\varphi\end{bmatrix}$$

３．緯度経度とガウスクリューゲル座標（局所座標）の変換式

（参考文献）野村正七「地図投影法」pp.318-319
政春尋志「ガウス＝クリューゲル図法投影式の導出法」地図，Vol.39，No.4，pp.31-37
萩原幸雄「測地学入門」p.15

（緯度経度→ガウスクリューゲル座標の計算手順）

$\lambda' = \lambda - \lambda_0$

$t = \tan\varphi$

$\eta = \dfrac{e^2}{1-e^2}\cos\varphi$

$$
\begin{aligned}
S = a\Bigg[\varphi &+ \left(-\frac{1}{4}\varphi - \frac{3}{8}\sin 2\varphi\right)e^2 + \left(-\frac{3}{64}\varphi - \frac{3}{32}\sin 2\varphi + \frac{15}{256}\sin 4\varphi\right)e^4 \\
&+ \left(-\frac{5}{256}\varphi - \frac{45}{1024}\sin 2\varphi + \frac{45}{1024}\sin 4\varphi - \frac{35}{3072}\sin 6\varphi\right)e^6 \\
&+ \left(-\frac{175}{16384}\varphi - \frac{105}{4096}\sin 2\varphi + \frac{525}{16384}\sin 4\varphi - \frac{175}{12288}\sin 6\varphi + \frac{315}{131072}\sin 8\varphi\right)e^8\Bigg]
\end{aligned}
$$

（子午線弧長）

$$x'_L(\varphi) = S + N\sin\varphi\cos\varphi\left[\frac{\lambda'^2}{2} + \frac{\lambda'^4\cos^2\varphi}{24}\left(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4\right) + \frac{\lambda'^6\cos^4\varphi}{720}\left(61 - 58t^2 + 270\eta^2\right)\right]$$

$$x_L = x_0 + m_0\left[x'_L(\varphi) - x'_L(\varphi_0)\right]$$

$$y_L = y_0 + m_0 N\cos\varphi\left[\lambda' + \frac{\lambda'^3\cos^2\varphi}{6}\left(1 - t^2 + \eta^2\right) + \frac{\lambda'^5\cos^4\varphi}{120}\left(5 - 18t^2 + 14\eta^2\right)\right]$$

（注意）角度の単位は、ラジアンを用いること

なお、S の計算は、楕円関数が利用可能ならば、簡便となる。

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$ （卯酉線曲率半径）

$$S = aE(\varphi, e) - \frac{e^2 N\sin 2\varphi}{2}$$ （子午線弧長）

（ガウスクリューゲル座標→緯度経度の計算手順）

以下のイテレーションで求める。

$\varphi^{(0)}$、$\lambda^{(0)}$　緯度、経度の近似値

$\varphi^{(1)}$、$\lambda^{(1)}$　緯度、経度の改良値

${x_L}^{(0)}$、${y_L}^{(0)}$　$\varphi^{(0)}$、$\lambda^{(0)}$ に対するガウスクリューゲル座標

$$N^{(0)} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^{(0)}}}$$ （卯酉線曲率半径の近似値）

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} + \frac{x_L - {x_L}^{(0)}}{a}$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \frac{y_L - {y_L}^{(0)}}{N^{(0)}\cos\varphi}$$

なお、初期値は、

$$\varphi^{(0)} = \varphi_0 + \frac{x_L - x_0}{a}$$

$$\lambda^{(0)} = \lambda_0 + \frac{y_L - y_0}{a\cos\varphi^{(0)}}$$

$$m = m_0\left(1+\frac{\lambda'^2}{2}\cos^2\varphi\right)$$

４．地心３次元直交座標と LSR 座標の変換

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(M+H)\sin\varphi\cos\lambda & -(N+H)\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -(M+H)\sin\varphi\sin\lambda & (N+H)\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ (M+H)\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dH \end{bmatrix}$$

よって、

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (N+H)\cos\varphi d\lambda \\ (M+H)d\varphi \\ dH \end{bmatrix}$$

上記行列は、正規直交行列であるため、この右辺が、上記座標を原点とする LSR の微分である。よって、

（変換式）

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T_0 \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{C0} \\ y_{C0} \\ z_{C0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} = T_0{}^t \begin{bmatrix} x-x_{C0} \\ y-y_{C0} \\ z-z_{C0} \end{bmatrix}$$

ここで、

$$T_0 = \begin{bmatrix} -\sin\lambda_0 & -\sin\varphi_0\cos\lambda_0 & \cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ \cos\lambda_0 & -\sin\varphi_0\sin\lambda_0 & \cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{C0} \\ y_{C0} \\ z_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_0+H_0)\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ (N_0+H_0)\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ ((1-e^2)N_0+H_0)\sin\varphi_0 \end{bmatrix}$$

５．３次元直交座標での重み行列

水準点の重みに必要な地心３次元直交座標での重み行列を求める。対象とする点を中心とする SLR を考えると、

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} dx_L \\ dy_L \\ dz_L \end{bmatrix}$$

ただし、$T_0 = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$

局所直交座標の分散共分散行列を

$$\Sigma_{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{p}}{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{p}}{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{v}}{}^2 \end{bmatrix}$$

とすると、３次元直交座標の分散共分散行列は

$$\Sigma_{\mathrm{C}} = T_0 \Sigma_{\mathrm{L}} T_0{}^{\mathrm{T}}$$

となる。地上点の観測の重みは、上記分散共分散行列の逆行列である。